<u>*CHAPITRE 2*</u> *:*

INTÉGRALES MULTIPLES.

1- Intégrale double d’une fonction continue sur un rectangle:

1.1-Somme de Riemann :

Soit f une fonction continue sur un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

à valeurs réelles.

Soit la subdivision de R obtenus en partageant $[a, b]$ *en* *m* *intervalles égaux et* $[c, d]$ *en* *n* *intervalles égaux.*

Alors on définit l'intégrale de f sur R par :

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}f(x_i,y_j)$$

1.2- Propriétés de l’intégrale double :

a. *Soit f et g deux fonctions continues sur R, on a :*

$$\iint_R \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) dxdy$$

$$= \alpha \iint_R f(x,y)dxdy$$

$$+\beta \iint_R g(x,y)dxdy$$

b. ***Si*** $\forall (x,y) \in R$: $f(x,y) \leq g(x,y)$ ***alors :***

$$\iint_R f(x,y)dxdy \leq \iint_R g(x,y)dxdy$$

c. $\left|\iint_R f(x,y)\,dxdy\right| \leq$

$$\iint_R |f(x,y)|\,dxdy$$

d. Additivité par rapport au domaine

Etant donné $x_0 \in \,]a,b[$ ***et*** $y_0 \in \,]c,d[$
on a :

$$\iint_R f(x,y)dxdy =$$

$$\iint_{[a,x_0]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

$$+\iint_{[x_0,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

Et

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,y_0]} f(x,y)dxdy$$

$$+ \iint_{[a,b]\times[y_0,d]} f(x,y)dxdy$$

1.3- Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue:

1.3.1- Théorème de Fubini :

Si f est continue sur $R = [a,b] \times [c,d]$ ***alors :***

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ce théorème permet donc de calculer une intégrale double par deux intégrales simples successives.

Cas particulier :

Dans le cas ou f s'écrit de la forme

$$f(x,y) = g(x) * h(y)$$

avec g et h sont continues sur $[a,b]$ *resp sur* $[c,d]$*, on a :*

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

$$= \left(\int_a^b g(x)dx\right) * \left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Exemple :

Calculons

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y+1}\,dxdy$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 [ln(x+y+1)]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \big(ln(x+2) - ln(x+1) \big)$$

$$= [(x+2)ln(x+2) - (x+2)]_0^1$$

$$-[(x+1)ln(x+1) - (x+1)]_0^1$$

$$= 3ln3 - 4ln2$$

2- Extension à une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$:

2.1- Définitions :

a- Soient A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, f une fonction bornée de A dans $\mathbb{R}$

et $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle contenant *A*.

On dit que f est intégrable sur A si la fonction définie sur R par :

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & si \quad (x, y) \epsilon A \\ 0 & si \quad (x, y) \notin A \end{cases}$$

est intégrable sur R

et l'on pose :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_R \tilde{f}(x,y)dxdy$$

b- Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite ***mesurable*** *si la fonction caractéristique χ_A est intégrable sur tout rectangle contenant A.*

On appelle « mesure de A » ou « l’aire de A » le réel

$$\mu(A) = \iint_A dxdy$$

2.2- Théorème de Fubini généralisé :

2.2.1- Proposition 1 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$A = \left\{ \begin{matrix} (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 : \quad x \epsilon [a, b] \quad et \\ \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{matrix} \right\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ ***telles que :*** $g \leq h$**.**

Si f est continue sur A,

alors elle est intégrable sur A et :

$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

2.2.2- Proposition 2 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$A = \left\{ \begin{matrix} (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2: \quad y\epsilon[c,d] \\ \\ et \quad g(y) \leq x \leq h(y) \end{matrix} \right\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[c, d]$ *telles que :* $g \leq h$.

Si f est continue sur A, alors elle est intégrable sur A

et :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemple :

Calculons l'aire d'un disque $D(O,R)$.

On sait que :

$$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \qquad x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 : \quad -R \leq x \leq R \\ \\ et \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \end{matrix} \right\}$$

On a donc :

$$\mu(D) = \iint_D dxdy$$

$$= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx$$

$$= 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

En utilisant le changement de variables :

$$x = Rsint \quad \textbf{où} \quad t \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

on trouve :

$$\mu(D) = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2t\; dt$$

$$= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + cos(2t)\big) dt$$

$$= R^2 \left[t + \frac{sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi R^2$$

D'où l'aire du disque $D(O,R)$ ***est*** $\mu(D) = \pi R^2$**.**